

常微分方程

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

`tysun@mail.ustc.edu.cn`

2021 年 8 月 5 日

目录

目录	2
1 初等积分法	3
1.1 一阶线性方程	3
2 存在和唯一性定理	5
2.1 Picard 存在唯一性定理	5
2.2 解的延伸	9
2.3 第一次习题课	11
2.4 比较定理	12
3 奇解	14
3.1 一阶隐式微分方程	14
3.1.1 微分法	14
3.1.2 参数法	15
4 高阶微分方程	17
4.1 解对初值和参数的连续依赖性	17
4.2 解对初值和参数的连续可微性	19
5 线性微分方程组	20
5.1 一般理论	20
5.2 齐次线性微分方程组	21
5.3 非齐次线性微分方程组	22
5.4 高阶线性微分方程	23
5.5 常系数高阶线性微分方程	24
6 幂级数解法	25
7 定性理论与分支理论初步	26
7.1 动力系统、相空间与轨线	26
7.2 解的稳定性	27
7.2.1 线性稳定性	27
7.2.2 Lyapunov 第二办法 (针对非线性方程)	28

7.3 平面上的动力系统, 奇点与极限环 30

Chapter 1

初等积分法

1.1 一阶线性方程

定理 1.1.1 (Gronwall 不等式). 设 $\psi(t)$ 满足

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds, \forall t \geq 0 \quad (1.1)$$

其中 $\beta(t)$ 非负, 那么

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(r)dr}ds, \forall t \geq 0 \quad (1.2)$$

证明. 首先想到的是考虑等式的情形,

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds, \forall t \geq 0 \quad (1.3)$$

希望能在此时推出

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(r)dr}ds, \forall t \geq 0 \quad (1.4)$$

对 (1.3) 两侧求导, 移项, 得到一个非齐次线性微分方程

$$\psi'(t) - \beta(t)\psi(t) = \alpha'(t) \quad (1.5)$$

选取它的一个积分因子

$$e^{-\int_0^t \beta(s)ds} \quad (1.6)$$

乘到 (1.5) 的两边, 得到

$$\left(e^{-\int_0^t \beta(s)ds} \psi(t) \right)' = e^{-\int_0^t \beta(s)ds} \alpha'(t) \quad (1.7)$$

将 (1.7) 两侧从 0 到 t 进行积分, 得

$$e^{-\int_0^t \beta(s)ds} \psi(t) - \psi(0) = \int_0^t e^{-\int_0^s \beta(r)dr} \alpha'(s)ds \quad (1.8)$$

$$= \int_0^t e^{-\int_0^s \beta(r)dr} d\alpha(s) \quad (1.9)$$

$$= e^{-\int_0^s \beta(r)dr} \alpha(s) \Big|_0^t - \int_0^t \alpha(s) de^{-\int_0^s \beta(r)dr} \quad (1.10)$$

$$= e^{-\int_0^t \beta(r) dr} \alpha(t) - \alpha(0) + \int_0^t \alpha(s) \beta(s) e^{-\int_0^s \beta(r) dr} ds \quad (1.11)$$

在 (1.3) 中令 $t = 0$, 得 $\psi(0) = \alpha(0)$, 所以有

$$e^{-\int_0^t \beta(r) dr} \psi(t) = e^{-\int_0^t \beta(r) dr} \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s) \beta(s) e^{-\int_0^s \beta(r) dr} ds \quad (1.12)$$

$$\psi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s) \beta(s) e^{\int_s^t \beta(r) dr} ds \quad (1.13)$$

等式的情形得证.

对于不等式的情形, 我们希望能照搬上面的证明, 但令人遗憾的是, 我们无法从积分的不等式直接得到微分的不等式.

但幸运的是, 如果记 (1.1) 式右侧的部分为 $\varphi(t)$, 即

$$\varphi(t) = \alpha(t) + \int_0^t \beta(s) \psi(s) ds \quad (1.14)$$

那么我们有

$$\varphi'(t) = \alpha'(t) + \beta(t) \psi(t) \quad (1.15)$$

$$\leq \alpha'(t) + \beta(t) \varphi(t) \quad (1.16)$$

能这样放缩是因为我们预先假定了 $\beta(t) \geq 0$.

这样我们就得到了想要的微分的不等式

$$\varphi'(t) - \beta(t) \varphi(t) \leq \alpha'(t) \quad (1.17)$$

接下来照搬上面的证明

将 (1.6) 乘到 (1.17) 的两边, 得到

$$\left(e^{-\int_0^t \beta(s) ds} \varphi(t) \right)' \leq e^{-\int_0^t \beta(s) ds} \alpha'(t) \quad (1.18)$$

将 (1.18) 两侧从 0 到 t 进行积分, 得

$$e^{-\int_0^t \beta(s) ds} \varphi(t) - \varphi(0) \leq \int_0^t e^{-\int_0^s \beta(r) dr} \alpha'(s) ds \quad (1.19)$$

$$= \int_0^t e^{-\int_0^s \beta(r) dr} d\alpha(s) \quad (1.20)$$

$$= e^{-\int_0^s \beta(r) dr} \alpha(s) \Big|_0^t - \int_0^t \alpha(s) d e^{-\int_0^s \beta(r) dr} \quad (1.21)$$

$$= e^{-\int_0^t \beta(r) dr} \alpha(t) - \alpha(0) + \int_0^t \alpha(s) \beta(s) e^{-\int_0^s \beta(r) dr} ds \quad (1.22)$$

在 (1.14) 中令 $t = 0$, 得 $\varphi(0) = \alpha(0)$, 所以有

$$e^{-\int_0^t \beta(r) dr} \varphi(t) \leq e^{-\int_0^t \beta(r) dr} \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s) \beta(s) e^{-\int_0^s \beta(r) dr} ds \quad (1.23)$$

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s) \beta(s) e^{\int_s^t \beta(r) dr} ds \quad (1.24)$$

而我们又有

$$\psi(t) \leq \varphi(t) \quad (1.25)$$

故得证!

□

Chapter 2

存在和唯一性定理

2.1 Picard 存在唯一性定理

$$(E) : \frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

$$\text{矩形区域 } R : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

$$I = [x_0 - h, x_0 + h]$$

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, M > \max_{(x,y) \in R^2} |f(x, y)|$$

定理 2.1.1. 若 f 在 R 上连续并且关于 y 满足 Lipschitz 条件, 则 (E) 在 I 上存在唯一解.
证明. Step1 转化为积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

一方面, 若 $y = y(x)$ 是 (E) 的解, 则有

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

两边同时关于 x 从 x_0 到 x 积分, 可得

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_0) &= \int_{x_0}^x \frac{dy(x)}{dx} dx = \int_{x_0}^x f(x, y) dx \\ \Rightarrow y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \end{aligned}$$

另一方面, 若 $y = y(x)$ 是积分方程在 $(x_0 - h, x_0 + h)$ 上的解, 则 $y(x)$ 可导, 于是

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$$

Step2 构造 Picard 序列 $\{y_n(x)\}$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx$$

$$y_0(x) = y_0$$

要说明 $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h], \forall n \in N_0, (x, y_n(x))$ 在矩形 R 里面, 才能说明序列的定义是好的

Claim: $|y_n(x) - y_0| \leq b$

$$n=1 \text{ 时}, |y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq M|x - x_0| < Mh \leq b.$$

设 $n = k$ 时断言成立, 则当 $n = k + 1$ 时, 归纳法用在了哪里呢? 需注意, 只有前一个 $y_k(x)$ 是定义好的, 我们才有下一个 y_{k+1} 可言; 这里的归纳法并不是说下一个的证明利用到了前一个的成立, 而是下一个的存在依赖于前一个的成立.

$$|y_{k+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_k(x)) dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x M dx \right| = M|x - x_0| < b$$

Step3 Picard 序列的收敛性

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^n y_k(x) - y_{k-1}(x) + y_0$$

要证 $\{y_n(x)\}$ 收敛, 只要证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) - y_{k-1}(x)$ 绝对收敛感觉这里的各种收敛乱乱的... 先不管了吧... 淑芬学完了再说

要证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ 在 I 上一致收敛

$$n = 0, |y_1(x) - y_0(x)| \leq M|x - x_0|$$

$$\begin{aligned} n = 1, |y_2(x) - y_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, y_0(x)) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_1(x)) - f(x, y_0(x))| dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L|y_1(x) - y_0(x)| dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x ML|x - x_0| dx \right| \\ &\leq ML \frac{|x - x_0|^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2, |y_3(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(x, y_2(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))| dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L|y_2(x) - y_1(x)| dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x ML^2 \frac{|x - x_0|^2}{2} dx \right| \\ &\leq ML^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!} \end{aligned}$$

Claim:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

用归纳法, 假设 $n = k$ 时结论成立, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(x, y_k(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, y_{k-1}(x)) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_k(x)) - f(x, y_{k-1}(x))| dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L |y_k(x) - y_{k-1}(x)| dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x ML^n \frac{|x - x_0|^n}{n!} dx \right| \\ &\leq ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L|x - x_0|)^n}{n!} \leq \frac{M}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Lh)^n}{n!} < +\infty$$

因此, $\exists \phi(x)$ s.t. $y_n(x) \rightarrow \phi(x)$ 在 I 上一致收敛. 由于 $y_n(x)$ 在 I 上是连续的, 故 $\phi(x)$ 在 I 上也连续.

再由

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx$$

关于 n 取极限得

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx$$

即 $y = \phi(x)$ 是 (E) 在 I 上的解.

Step4 唯一性

令 $y = u(x)$ 和 $y = v(x)$ 是 (E) 的两个不同的解, 它们共同的存在区间是 $(x_0 - d, x_0 + d)$

令 $w(x) = u(x) - v(x)$, 则

$$\begin{aligned} |u(x) - v(x)| &= \left| \int_{x_0}^x |f(x, u(x)) - f(x, v(x))| dx \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x L |u(x) - v(x)| dx \\ &\leq Lk |x - x_0| \end{aligned}$$

将第三行得到的不等式带入到第二行中, 得到

$$\begin{aligned} |u(x) - v(x)| &\leq \int_{x_0}^x L |u(x) - v(x)| dx \\ &= \int_{x_0}^x L^2 k |x - x_0| dx \\ &\leq \frac{k(L|x - x_0|)^2}{2} \end{aligned}$$

重复上述过程可得,

$$|u(x) - v(x)| \leq \frac{K(L|x - x_0|)^n}{n!} \leq \frac{k(Ld)^n}{n!} \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty$$

由 Gronwell 不等式, $u(x) - v(x) \equiv 0$ on $[x_0 - d, x_0 + d]$

注记. 出现单个 f , 以 M 为界; 出现两个 f 作差, 利用 *Lipschitz* 条件得到界

注记. 为什么要转化为积分方程? 我们要求微分方程的解必须连续且可导, 而对于积分方程我们只需要要求解连续, 连续且满足积分方程一定可微, 这是一个很大的好处。

对解的正则性的要求降低了

积分号与极限可以换序... 开始触及到知识盲区了...

积分满足一些很显然的很好的估计, 比如

$$\left| \int f(x, y) dx \right| \leq \int |f(x, y)| dx$$

只是说在常微分方程及阶段这个优势不是很明显, 在偏微分方程阶段, 把微分方程化为积分方程是非常重要的手段

涉及到估计往往需要积分方程

注记. 现在我只知道 f 在矩形上有定义, 现在我假设 y 满足积分方程, $(x, y(x))$ 是否落到矩形中?

$$|y(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x M dx \right| \leq M|x - x_0| < M(h - \epsilon) < b - \tilde{\epsilon}$$

注记. 第一步, 构造逼近解; 第二步, 说明极限存在; 第三步, 说明极限就是我们要找的

例 2.1.1 (Ricatti 方程).

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(x_0) = y_0$$

先判断关于 y 是否 *Lipschitz*, 事实上有一个更强的条件, 即 f 关于 y 是否有连续的偏导数, 若有, 关于 y 用中值定理, 得到 f 关于 y 确实 *Lipschitz*

由 *Picard* 定理, 存在唯一的积分曲线经过 (x_0, y_0)

定理 2.1.2 (存在性 (Peano 存在定理)). 设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 R 内连续, 则初值问题 (E) 在区间 $|x - x_0| < h$ 上至少存在一个解 $y = y(x)$.

定义 2.1.1. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续且满足不等式 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|)$, 其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数, 而且积分 $\int_0^{r_1} \frac{r}{F(r)} = +\infty$, 其中 $r_1 > 0$ 是常数, 则称 f 在 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件; 特别地, 当取 $F(r) = Lr$ 时, 得到 *Lipschitz* 条件.

定理 2.1.3. 设 $f(x, y)$ 在区域 G 内对 y 满足 *Osgood* 条件, 则微分方程 (3.9) 在 G 内经过每一点的解是唯一的.

证明. 用反证法, 假设在 G 内存在一个点 (x_0, y_0) , 使得方程 (3.9) 有两个解 $y = y_1(x), y = y_2(x)$ 都经过这个点, 存在一个 $x_1 \neq x_0$ 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1 > x_0, y_1(x_1) > y_2(x_1)$. 令

$$\bar{x} = \sup\{x_0 \leq x < x_1 : y_1(x) = y_2(x)\}$$

. 则

$$y_1(x) > y_2(x), \forall \bar{x} < x \leq x_1$$

$$\frac{d(y_1(x) - y_2(x))}{dx} = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \leq F(y_1 - y_2), \forall \bar{x} < x < x_1$$

令 $r(x) = y_1(x) - y_2(x)$, 则 $\frac{dr}{dx} \leq F(r), \forall \bar{x} < x < x_1$

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} \leq \frac{\bar{x}}{x_1} dx = x_1 - \bar{x} < +\infty$$

由 Osgood 条件, $\frac{0}{r_1} \frac{dr}{F(r)} = +\infty$, 矛盾. □

2.2 解的延伸

考虑方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

定理 2.2.1. 设 P_0 为区域 G 内任意一点, 并设 Γ 是微分方程 (3.18) 的经过 P_0 点的任意一条积分曲线, 积分曲线 Γ 将在区域 G 内延伸到边界. 对于任意的含在区域 G 中的有界闭区域 G_1 包含 P_0 , 那么 Γ 可以延伸到 G_1 之外.

证明. 设经过 P_0 的方程的解 Γ 为 $y = \phi(x)$. 设 J 是它的极大存在区间, 只考虑 Γ 在 P_0 右侧的延伸情况. 令 $J^+ = J \cap [x_0, +\infty)$ 是 Γ 在 P_0 右侧的极大存在区间.

- $J^+ = [x_0, +\infty)$, 则 Γ 是延伸到边界的.
- $J^+ = [x_0, x_1], x_1 < +\infty$, 以 $(x_1, \phi(x_1))$ 为中心, 作矩形 $|x - x_1| \leq a, |y - y_1| \leq b$, 由 Peano 存在定理, 存在 $h > 0$ 使得 (3.18) 在 $(x_1 - h, x_1 + h)$ 上存在一个解 $y = \phi_1(x)$ 令 $y_1(x)$, 则 y_x 是 (3.18) 在 $x_0 \leq x \leq x_1 + h$ 上的解

事实上, 当 $x_0 \leq x \leq x_1, \phi(x) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \phi(x)) dx$

特别地, $\phi(x_1) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \phi(x)) dx$

当 $x_1 \leq x \leq x_1 + h, \phi_1(x) = \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \phi_1(x)) dx$

$$y_1(x) = \phi(x_1) + \int_{x_1}^x f(x, y_1(x)) dx = \phi(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx$$

这与 J^+ 是 Γ 的右行极大存在区间矛盾!

- $J^+ = [x_0, x_1], x_1 < +\infty$ 用反证法, 假设存在有界闭集 $G_1 \subset G, p \in G_1, \Gamma \subset G_1$. claim: 当 $x \rightarrow x_1$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_1} \varphi(x)$ 存在

$$\forall x_n \rightarrow x_1, |\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| = \left| \int_{x_m}^{x_n} \frac{d\varphi}{dx} dx \right| = \left| \int_{x_m}^{x_n} f(x, \varphi(x)) dx \right| \leq \max_{(x,y) \in G} |f(x, y)| \leq M_1 |x_n - x_m|$$

故 $\{\varphi(x_n)\}$ 是 Cauchy 列

令 $\bar{y} = \lim_{x \rightarrow x_1} \varphi(x)$ 令, 则 $\tilde{y}(x)$ 是 (3.18) 在 $x_0 \leq x \leq x_1$ 上的解

事实上, $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x)) dx, \forall x_0 \leq x \leq x_1$

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\bar{y} = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x)) dx \Leftrightarrow \tilde{y}(x_1) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \tilde{y}(x)) dx$

□

例 2.2.1. 试证微分方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

的任一解的存在区间都是有界的.

证明. 令 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在 R^2 上连续, 且在 R^2 上关于 y 是局部 Lipschitz. 由 Picard 存在唯一性定理, 过任意一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ , 要证 Γ 的极大存在区间是有界的.

否则, 设 Γ 的极大存在区间 J 是无界的. 不妨设 $(c, +\infty) \subset J$. 事实上, 如果 $y = y(x)$ 是原方程的解, 且 $(-\infty, c) \subset J$ 令 $\hat{y}(x) = -y(-x)$, 则

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = \frac{dy}{dx}(-x) = (-x)^2 + (y(-x))^2 = x^2 + (\hat{y}(x))^2$$

则 $\hat{y}(x)$ 也是原方程的解.

设 $x_1 > 0, (x_1, +\infty) \subset J$, 则

$$\frac{dy}{dx} > x_1^2 + y^2, \forall x \in (x_1, +\infty)$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^2 + y^2} \frac{dy}{dx} &\leq 1 \\ \frac{d\frac{y}{x_1}}{x_1(1 + \frac{y^2}{x_1^2})} &= \frac{1}{x_1} d\arctan \frac{y}{x_1} \\ \frac{1}{x_1} \frac{d\arctan \frac{y}{x_1}}{dx} &\leq 1 \end{aligned}$$

两边同时从 x_1 到 x 积分可得,

$$\frac{\pi}{x_1} \leq \frac{1}{x_1} (\arctan \frac{y(x)}{x_1} - \arctan \frac{y(x_1)}{x_1}) \leq x - x_1, \forall x > x_1$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 则得到矛盾! □

例 2.2.2. 在平面上任取一点 $P_0 = (x_0, y_0)$, 试证初值问题

$$\frac{dy}{dx} = (x - y)e^{xy^2}, y(x_0) = y_0$$

的右行解都在区间 $x_0 \leq x < \infty$ 存在.

证明. $f(x, y) = (x - y)e^{xy^2}$ 在 R^2 上连续, 局部 Lip, 由 Picard 定理, 过任意一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ . 要证 Γ 的右行部分的存在区间是 $[x_0, +\infty)$

若 P_0 在直线 $y = x$ 的上方, 则过 P_0 的积分曲线会下降, 穿过 $y = x$ 到达它的下方. 由延伸定理, Γ 会延伸到 $G = \{(x, y) | x_0 \leq x < +\infty\}$ 的边界. 由于在 $L: y = x$ 下方与它接近的点, 斜率远小于 1, 故 Γ 无法穿过 L 到达它的上方. 故 Γ 一直位于 L 的下方. 因此 Γ 的右行存在区间为 $[x_0, +\infty)$. □

定理 2.2.2. 设微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, 其中函数 $f(x, y)$ 在条形区域 $S: \alpha < x < \beta, -\infty < y < +\infty$ 内连续, 且满足不等式 $f(x, y) \leq A(x)|y| + B(x)$, 其中 $A(x) \geq 0, B(x) \geq 0$ 在区间 $\alpha < x < \beta$ 上连续, 则方程的每一个解都以区间 $\alpha < x < \beta$ 为最大存在区间.

证明. 设 $P_0 \in S$ 是任意一点. 由于 $f(x, y)$ 在 S 上是连续的, 由 Peano 定理, 一定存在过 P_0 的积分曲线 Γ . 要证 Γ 的最大存在区间是 (α, β) 只考虑右行解, 要证右行解的最大存在区间是 (x_0, β) .

否则, 存在 $x_0 < \beta_0 < \beta$, 使得右行解的最大存在区间是 $[x_0, \beta_0)$

任取 Γ 上一点 (x_1, y_1) , 在矩形 $R: |x - x_1| \leq a, |y - y_1| \leq b$ 上, $f(x, y)$ 是连续的.

由 Peano 定理, 在 $(x_1 - h, x_1 + h)$ 上存在解, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

设在 \mathbb{R} 上, $A(x), B(x)$ 的最大值是 A_0, B_0 , 则 $|f(x, y)| \leq A_0(|y| + b) + B_0$
取 $M = A_0(|y_1| + b) + B_0 + 1$, 则

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{A_0(|y_1| + b) + B_0 + 1} \rightarrow \frac{1}{A_0}$$

当 b 充分大时, $\frac{b}{M} > \frac{1}{2A_0}$
选取 $a = \frac{1}{4A_0}$, 则 $h = \frac{1}{4A_0}$

取 x_1 充分接近 β_0 , 则 Γ 可延伸到 $x_1 + \frac{1}{4A_0} > \beta_0$, 这与 $[x_0, \beta_0)$ 是右行最大存在区间矛盾! \square

2.3 第一次习题课

例 2.3.1.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &\leq \frac{f(x)}{g(y)}, g(y) > 0 \\ g(y)dy &\leq f(x)dx \\ \int_0^y g(t)dt - \int_0^x f(t)dt &\leq C \\ \psi(x) &:= \int_0^{y(x)} g(t)dt - \int_0^x f(t)dt \\ \dot{\psi}(x) &= \end{aligned}$$

例 2.3.2.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 + y^2 \geq y^2 \\ y(0) &= 1 \\ \frac{dy}{y^2} &\geq dx \\ \psi(x) &= \frac{1}{y} + x \leq \psi(0) = 1 \\ \dot{\psi}(x) &= -\frac{\dot{y}}{y^2} + 1 = -\frac{x^2 + y^2}{y^2} + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

注记. 若要证 $f = g$, 可证 f 和 g 满足相同的方程并且有相同的初值条件

例 2.3.3.

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \text{ in } (x, y) \in \mathbb{R} \times [a, a + \epsilon]$$

其中 $f(a) = 0, f(y) > 0$ in $(a, a + \epsilon)$ 当 $|\int_a^{a+\epsilon} \frac{1}{f(y)} dy| < \infty$ 时, 有两条过 (x_0, a) 的积分曲线; 当 $|\int_a^{a+\epsilon} \frac{1}{f(y)} dy| = \infty$ 时, 只有一条

证明. 内容...

\square

2.4 比较定理

定理 2.4.1 (第一比较定理). 假设函数 $f(x, y)$ 和 $F(x, y)$ 都在平面区域 G 内连续, 并且满足不等式 $f < F, \forall (x, y) \in G$, 又设函数 $y = \phi(x)$ 与 $y = \Phi(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上分别是初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), y(x_0) = y_0$$

的解, 其中 $(x_0, y_0) \in G$, 则我们有 $\phi(x) < \Phi(x)$, when $x_0 < x < b$; $\phi(x) > \Phi(x)$, when $a < x < x_0$

证明. 只证明右行部分.

令 $\psi(x) = \Phi(x) - \phi(x)$, 则

$$\frac{d\psi}{dx} = F(x, \Phi(x)) - f(x, \phi(x)), \psi(x_0) = 0$$

由于 $F(x_0, \Phi(x_0)) > f(x_0, \phi(x_0))$, 故 $\frac{d\psi}{dx}(x_0) > 0$, 所以存在 $\sigma > 0$, 使得 $\psi(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \sigma)$

要证的是 $\psi(x) > 0, \forall x_0 < x < b$ 否则, 存在 $x_0 + \sigma < x_1 < b$, 使得 $\psi(x_1) = 0$

令 $\beta = \min\{x_0 < x < b | \psi(x) = 0\}$, 则 $\psi(\beta) = 0$, 且 $\psi'(\beta) \leq 0$

但是, $\frac{d\psi}{dx}(\beta) = F(x_1, \Phi(\beta)) - f(x, \phi(\beta)) > 0$, 矛盾! □

现在考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

其中 $f(x, y)$ 在矩形区域 $R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 上连续. 令 $M > \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|, h = \min a, \frac{b}{M}$,

在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上至少存在一个解如果在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上初值问题 E 有两个解 $y = Z(x), y = W(x)$ 使得 E 的任何的解 $y = y(x)$ 都满足 $W(x) \leq y(x) \leq Z(x), x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, 则称 $W(x), Z(x)$ 分别是初值问题的最小解和最大解

定理 2.4.2. 存在 $0 < \sigma < h$, 使得在区间 $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$ 上初值问题存在最大解和最小解.

定理 2.4.3 (Ascoli-Azela). 设在区间 I 上给定一个函数列 $\{f_n(x)\}_1^\infty$, 称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致有界是指 $\exists K > 0$, 使得 $|f_n(x)| \leq K, \forall x \in I, \forall n \geq 1$. 称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上等度连续, 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$, 使得 $\forall |x_1 - x_2| < \delta, |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon, \forall n = 1, 2, \dots$

若 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭区间 I 上一致有界, 并且等度连续, 则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

证明. 考虑初值问题

$$(E_m): \frac{dy}{dx} = f(x, y) + \epsilon_m, y(x_0) = y_0$$

$$\epsilon_m > 0, M_m = M + \epsilon_m, h_m = \min a, \frac{b}{M_m} \leq h$$

若 ϵ_m 单调递减趋于 0, h_m 趋于 h .

则在 $(x_0 - h_m, x_0 + h_m)$ 上存在 (E_m) 的解 $y = \varphi_m(x)$

由于 $\epsilon \rightarrow 0$, 故 $h_m \rightarrow h$, 因此 $\exists \sigma > 0$, 当 m 充分大时, $\varphi(x)$ 在 $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ 上都存在, 并且

$$\varphi_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f_m(x, \varphi_m(x)) dx, f_m(x, y) = f(x, y) + \epsilon_m$$

由第一比较定理, 对于 (E) 的任一解 $y = \phi(x)$, 有

$$\varphi_m(x) < \phi(x), x_0 - \sigma < x < x_0$$

$$\varphi_m(x) > \phi(x), x_0 < x < x_0 + \sigma$$

$$\|\phi\| \leq \|\varphi_m\| + \int_{\min}^{\max} dx \leq M, \forall x \in I, \forall m$$

$$\|\phi\| \leq (M+1)\|\varphi_m\|, \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{2(M+1)}, \forall \|\varphi_m\| < \delta, \|\phi\| < \epsilon$$

由 Arzela - Adcoli, 存在子列 (仍记为 $\varphi_n(x)$) 在 $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$ 上一致收敛到 $y = \Phi(x)$ 令 $m \rightarrow \infty$, 有

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f_m(x, \Phi(x)) dx, \forall x \in [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$$

且 $\Phi(x)$ 在 $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$ 上连续, 因此, $\Phi(x)$ 是 (E) 在 $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$ 上的解.

由第一比较定理, (E) 的任意的解 $y = y(x)$, 都有

$$y(x) < \varphi_m(x), x_0 < x \leq x_0 + \sigma$$

则有

$$y(x) \leq \Phi(x), x_0 < x \leq x_0 + \sigma$$

□

定理 2.4.4. 设函数 $f(x, y)$ 与 $F(x, y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足 $f(x, y) \leq F(x, y, \forall (x, y) \in G$, 又设函数 $\phi(x), \Phi(x)$ 分别是

$$(E_1) : \frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

$$(E_2) : \frac{dy}{dx} = F(x, y), y(x_0) = y_0$$

的解 ($(x_0, y_0) \in G$) 并且 $y = \varphi(x)$ 是 (E_1) 的右行最小解和左行最大解, 则由如下关系:

$$\varphi(x) \leq \Phi(x), x_0 \leq x < b$$

$$\varphi(x) \geq \Phi(x), a < x \leq x_0$$

Chapter 3

奇解

3.1 一阶隐式微分方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

3.1.1 微分法

若从 (4.1) 可解出

$$y = f(x, p), p = \frac{dy}{dx}$$

对 x 求导,

$$p = f'_x + f'_p \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - f'_x}{f'_p}$$

$$f'_p dp + (f'_x - p) dx = 0$$

若 (4.3) 可解得通解 $p = v(x, C)$, 则原方程的解为 $y = f(x, v(x, C))$, C 为任意常数.

若 (4.3) 可解得一个特解 $p = w(x)$, 则原方程的特解为 $y = f(x, w(x))$.

有时可解 (4.3) 得到 $x = v(p, C)$, 则原方程的通解是 $y = f(v(p, C), p)$, $x = v(p, C)$.

例 3.1.1. 求解克莱罗方程

$$y = xp + f(p)$$

其中 $f''(p) \neq 0$

证明. 对 x 求导, 可得

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + f'(p) \frac{dp}{dx} \rightarrow (x + f'(p)) \frac{dp}{dx} = 0$$

若 $x + f'(p) = 0$, 即 $x = -f'(p)$, $y = -pf'(p) + f(p)$, 是特解

若 $\frac{dp}{dx} = 0$, 则得到通解 $p = C$, 故原方程通解 $y = Cx + f(C)$

由于 $f''(p) \neq 0$, p 可写成

□

例 3.1.2. 求解微分方程

$$x(y')^2 - 2yy' + 9x = 0$$

证明. 当 $p=0$ 时, 不可能是方程的解当 $p \neq 0$ 时,

$$y = \frac{xp^2 + 9x}{2p} = \frac{xp}{2} + \frac{9x}{2p}$$

两边对 x 求导, 可得

$$\begin{aligned} p &= \frac{p}{2} + \frac{x}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{9}{2p} - \frac{9x}{2p^2} \frac{dp}{dx} \\ -\left(\frac{p}{2} - \frac{9}{2p}\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{9x}{2p^2}\right) \frac{dp}{dx} &= 0 \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2p^2}\right) \left(x \frac{dp}{dx} - p\right) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p = 3$, 原方程特解 $y = 3x$

若 $x \frac{dp}{dx} - p = 0$, 则 $p = Cx$ 故原方程通解是

$$y = \frac{Cx^2}{2} + \frac{9}{2C}$$

□

3.1.2 参数法

设隐式方程不显含自变量, 即 $F(y, p) = 0$

设 $y = g(t), p = h(t)$ 是 (4.12) 的一个参数表示, 则

$$dx = \frac{1}{p} dy = \frac{g'(t)}{h(t)} dt$$

故

$$x = \int \frac{g'(t)}{h(t)} dt + C$$

于是, 原方程的解为
$$\begin{cases} x = \int \frac{g'(t)}{h(t)} dt + C \\ y = g(t) \end{cases}$$

例 3.1.3. 求解微分方程

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

若 $p = 0$, 则 $y = 1$, 是方程的特解

例 3.1.4. 考虑隐式微分方程 $F(x, y, p) = 0$ 设 $x = f(u, v), y = g(u, v), p = h(u, v)$ 上述方程的参数化表示由于 $dy = p dx$ 故

$$g'_u du + g'_v dv = h(f'_u du + f'_v dv)$$

因此

$$(g'_u - h f'_u) du + (g'_v - h f'_v) dv = 0$$

若从上式可以解出 $u = Q(v, C)$, 那么原方程的通解为 $\begin{cases} x = f(Q(v, C), v) \\ y = g(Q(v, C), v) \end{cases}$ 若从上式可以解出特

解 $u = S(v)$, 则原方程的特解为 $\begin{cases} x = f(S(v), v) \\ y = g(S(v), v) \end{cases}$

例 3.1.5. 解微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y - x = 0$$

Chapter 4

高阶微分方程

考虑 n 阶微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, \dots, y^{n-1})$$

令

$$y_1 = y, y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \dots, y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx}$$

原方程可以化为

$$\frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, \dots, y_n)$$

一般地, 考虑
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$
 f_1, \dots, f_n 是关于变量 (x, y_1, \dots, y_n) 在区域 D 上的连续函数. 上式可以写成

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

如果 $f_k(x, y_1, \dots, y_k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i + e_k(x)$, 则 $f(x, y) = A(x)y + e(x)$

此时,

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + e(x)$$

若向量函数 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 在 $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 连续, 且 $\vec{f}(x, \vec{y})$ 关于 \vec{y} 满足 Lipschitz 条件: $\exists L > 0$, 使得

$$|\vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2)| \leq L|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|$$

4.1 解对初值和参数的连续依赖性

考虑
$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \lambda) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$
 要研究它的解 $y = \varphi(x; x_0, \vec{y}_0, \lambda)$ 对初值 (x_0, \vec{y}_0) 及参数 λ 的连续依赖性令 $\tilde{x} = x - x_0, \tilde{\vec{y}} = \vec{y} - \vec{y}_0$

因此, 只需讨论方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

关于参数 λ 的连续依赖性.

证明. 1. 等价于

$$y = \int_0^x f(x, y, \lambda) dx$$

2. 定义

$$\varphi(x)$$

3. $k=0$ 时, 结论成立

假设 k 时结论成立, 当 $k+1$ 时, $\forall (x_0, \lambda_0) \in D$,

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(x, \lambda) - \varphi(x_0, \lambda_0) &= \int_0^x f(x, \varphi_k(x, \lambda), \lambda) dx - \int_0^{x_0} f(x, \varphi_k(x, \lambda_0), \lambda) dx \\ &= \end{aligned}$$

□

定理 4.1.1. 设 n 维向量函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 空间内的某个开区域 G 上连续, 而且对 y 满足局部 Lipschitz 条件. 假设 $y = \xi(x)$ 是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的一个解, 令它的存在区间为 J . 现在区间 J 内任取一个有界闭区间 $a \leq x \leq b$, 存在常数 $\delta > 0$, 使得对于任何初值 (x_0, y_0) , $a \leq x_0 \leq b$, $|y_0 - \xi(x_0)| \leq \delta$, 柯西问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 也至少在区间 $a \leq x \leq b$ 存在, 并且在闭区域 $D_\delta : a \leq x \leq b, a \leq x_0 \leq b, |y_0 - \xi(x_0)| \leq \delta$ 上是连续的.

证明. 设 f 在 G 上是 Lipschitz 的, 令

$$\eta(x) = y(x) - \xi(x)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} &= \frac{dy}{dx} - \frac{d\xi}{dx} = f(x, \eta + \xi) - f(x, \xi) \\ \eta(x_0) &= y(x_0) - \xi(x_0) = y_0 - \xi(x_0) \end{aligned}$$

把研究 y 转化为研究 η

由于 f 是 Lip 的,

$$|g(x, y)| \leq L|\eta|$$

$$|f(x, \eta_1) - g(x, \eta_2)| = |f(x, \eta_1 + \xi) - f(x, \eta_2 + \xi)| \leq L|\eta_1 - \eta_2|$$

构造 Picard 序列 $\left\{ \dots \right.$

Claim

$$\begin{aligned} || &\leq \frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} |y_0 - \xi(x_0)| \\ |\varphi_k(x)| &\leq \sigma \end{aligned}$$

用数学归纳法证明 Claim1

当 $k=0$ 时,

$$\varphi_1(x) - \varphi_0(x) = \left| \int_{x_0}^x \right| \leq L|y_0 - \xi(x_0)|dx = L|y_0 - \xi(x_0)||x - x_0|$$

结论成立

设 k 时结论成立, 则 $k+1$ 时,

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| = \left| \int_{x_0}^x (g(x, \varphi_k(x)) - g(x, \varphi_{k-1}(x))) dx \right|$$

取 $\sigma > 0$, 使得 $D = \{(x, y) | |y - \xi(x)| \leq \sigma\} \subset G$ 由于 f 在 G 上局部 Lipschitz, 则 f 在 D 上关于 y 是 Lipschitz 的. 取 $\delta > 0$ 使得 $\delta e^{L|b-a|} = \frac{\sigma}{2}$ □

4.2 解对初值和参数的连续可微性

定理 4.2.1. 设 $f(x, y, \lambda)$ 在区域 $G: |x| \leq a, |y| \leq b, |\lambda - \lambda_0| \leq c$ 上连续, 而且对 y, λ 又连续的偏导数, 则 (5.5.2) 的解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 在区域 D 上是连续可微的.

Chapter 5

线性微分方程组

5.1 一般理论

考虑标准形式的 n 阶线性微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad a < x < b$$

其中出现的系数 $a_{ij}(x), f_i(x) \in C(a, b)$. 可改写成矩阵的形式

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x), \quad a < x < b$$

要想说明 (a, b) 上的唯一性, 只需说明 (a, b) 中的任意的闭区间的唯一性.
 $\forall I \subset (a, b)$ 是闭区间,

$$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| = |A(x)(y_1 - y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

由 Picard 存在唯一性定理,(6.1) 在 (a, b) 上有唯一解.

5.2 齐次线性微分方程组

考虑标准形式的 n 阶齐次线性微分方程组

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y}, \quad a < x < b \quad (5.1)$$

记方程的解的全体为 S , 容易看出 S 是一个线性空间.

命题 5.2.1. S 是 n 维线性空间.

证明. 任取 $x_0 \in (a, b)$, 定义

$$H_{x_0}: S \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{y} \longmapsto \vec{y}(x_0)$$

- H_{x_0} 是线性映射. 显然.
- H_{x_0} 是满射. 任意初值存在解.
- H_{x_0} 是单射. 这样的解是唯一的.

□

定义 5.2.1. 称(5.1)的 n 个线性无关的解为一组基础解系.

假设已知方程(5.1)的 n 个解 y_1, \dots, y_n , 这 n 个在区间 (a, b) 上的函数的线性无关性等同于任取 $x_0 \in (a, b)$ 后 n 个数组向量 $y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$ 的线性无关性. 线性代数的知识告诉我们要考察

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & \cdots & y_{1n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x_0) & \cdots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix}.$$

上面的观察告诉我们 $W(x)$ 在 (a, b) 上要么恒为零要么恒不为零.

定理 5.2.1.

$$W(x) = e^{\int_{x_0}^x \operatorname{tr} A(x) dx} W(x_0)$$

5.3 非齐次线性微分方程组

定义 5.3.1. 对应于解组 (6.8), 令矩阵 $Y(x)$

例 5.3.1. 内容...

证明.

$$\frac{d}{dx}$$

由于

故

$$\Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} = \frac{f(s)}{W(s)} \begin{pmatrix} -\varphi_2(s) \\ \varphi_1(s) \end{pmatrix}$$

□

5.4 高阶线性微分方程

考虑

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x) y = f(x), \quad a < x < b \quad (5.2)$$

引进新的未知函数

$$y_1 = y, y_2 = \frac{dy}{dx}, \cdots, y_n = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

则方程(5.2)等价于如下方程组

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x),$$

其中

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix}.$$

5.5 常系数高阶线性微分方程

例 5.5.1. 设欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (5.3)$$

其中 a_1, a_2, \cdots, a_n 都是常数, $x > 0$. 试利用适当的变换把它化成常系数的非齐次线性微分方程.

解. 设 $x = e^t$, 即 $t = \ln x$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dy}{dt} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] \\ &= -2 \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{x^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{x^3} \left(\frac{d}{dt} - 2 \right) \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{x^3} \left(\frac{d}{dt} - 2 \right) \left(\frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

记

$$\frac{d}{dt} =: D$$

不难由归纳法证明

$$y^{(k)} = \frac{1}{x^k} D(D-1) \cdots (D-k+1)y$$

□

Chapter 6

幂级数解法

Chapter 7

定性理论与分支理论初步

7.1 动力系统、相空间与轨线

设 t 时刻质点的位置 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 运动速度 $v = (v_1(x), \dots, v_n(x))$, 则质点的运动方程为

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \quad (7.1)$$

这个方程不显含自变量, 称这样的方程是自治的. 若 $v(x)$ 满足 Picard 定理的条件, 则以 $x(t_0) = x_0$ 有唯一解 $x = \varphi(t; t_0, x_0)$.

注记. 为什么要将之视为 \mathbb{R}^n 中的一条曲线而不是 \mathbb{R}^{n+1} 中的一条曲线

把 x 取值的的空间 \mathbb{R}^n 称为相空间, 把 (t, x) 所在的的空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 称为增广相空间

(8.3) 给出了与线速场 $u(x)$ 相吻合的一条“光滑”曲线, 称之为轨线。用箭头在轨线标明对应于时间增加质点的运动方向。

目标: 从向量场 $v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$ 出发获取轨线的集合特征, 或者更进一步, 弄清轨线族的拓扑结构图

拓扑结构中有两个东西特别重要,

1. 平衡点: 若 $v(x_0) = 0$, 则称 x_0 为方程7.1的一个平衡点. 对于平衡点我们需要关注它是否是稳定的、渐近稳定的, 如果不稳定, 我们想知道它为什么不稳定
2. 闭轨: 若存在方程7.1的非定常的周期运动 $\varphi(t + T; t_0, x_0) = \varphi(t; t_0, x_0), \forall t$, 我们想知道相图中是否存在闭轨, 如果存在, 有多少条

例 7.1.1.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 则???

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1), r(0) = r_0 \\ \frac{d\theta}{dt} = 1, \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

那么我们可以找到平衡点

1. $r_0 = 0$

2. $r_0 \neq 0$

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \frac{1}{r_0^2})e^{2t}}}$$

注记. 这个极坐标的变换不保持平衡点???

本例中我们是通过把解解出来之后研究它的相图, 本章的目的是不解它就研究它的相图

称方程7.1为一个动力系统, 其基本性质如下:

1. 积分曲线的平移不变性设 $\varphi(t)$ 是方程7.1的一个积分曲线, 则 $\varphi(t + C)$ 仍然是积分曲线. 注意, 不重合.

$$\frac{d\varphi(t + C)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}(t + C) = v(\varphi(t + C))$$

要去思考一下对于非自治方程为什么就不成立了

2. 经过相空间每一点的轨线是唯一的.

性质一和性质二说明, 每条轨线都是增广相空间中沿 t 轴可平移重合的一族积分曲线在相空间中的投影, 而且只是这族积分曲线的投影.

3. 群的性质, 单参数连续变换群! 好耶

7.2 解的稳定性

考虑

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (7.2)$$

其中 $f(t, x)$ 对 $x \in G \subset \mathbb{R}^n, t \in (-\infty, +\infty)$ 连续, 且关于 x 满足李氏条件.

定义 7.2.1. 假设(7.2)有一个解 $x = \varphi(t)$ 在 $t_0 \leq t < +\infty$ 有定义.

称(7.2)的解 $x = \varphi(t)$ 是 *Lyapunov* 稳定的, 如果对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$ 对于 $\forall x_0$ 满足 $|x_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, 有 $|x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)| < \varepsilon$ 对 $\forall t \geq t_0$ 成立.

称(7.2)的解 $x = \varphi(t)$ 是渐进稳定的, 如果 $\exists \delta_1, s.t.$ 对于 $\forall x_0$ 满足 $|x_0 - \varphi(t_0)| < \delta_1$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)| = 0$ 成立.

7.2.1 线性稳定性

令

$$y = \tilde{y} + y_*$$

代入到

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

则

$$LHS = \frac{d(\tilde{y} + y_*)}{dt} = \frac{d\tilde{y}}{dt}$$

$$\begin{aligned} RHS &= f(\tilde{y} + y_*) = f(y_*) + f'(y_*)\tilde{y} + [f(\tilde{y} + y_*) - f(y_*) - f'(y_*)\tilde{y}] \\ &= f'(y_*)\tilde{y} + [f(\tilde{y} + y_*) - f'(y_*)\tilde{y}] \end{aligned}$$

$$= A\tilde{y} + N(\tilde{y})$$

其中 $A = f'(y_*)$ 是常数矩阵, 而 $N(\tilde{y})$ 满足 $\lim_{\tilde{y} \rightarrow 0} \frac{|N(\tilde{y})|}{|\tilde{y}|} = 0$.

在(7.2)中, 设 $x = 0$ 是一个解, 令 $f(t, x) = A(t)x + N(t, x)$, $\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|N(t, x)|}{|x|} = 0$, $N(t, 0) = 0$
 $A(t)$ 是 n 阶矩阵, 在 $t \geq t_0$ 上连续

考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (7.3)$$

的稳定性. 称它的稳定与不稳定为原方程7.2的线性稳定与不稳定

定理 7.2.1. 在 (7.3) 中, 若 $A(t)$ 是常数矩阵, 则

1. 零解是渐近稳定的, 当且仅当 A 的全部特征根有负的实部
2. 零解是稳定的, 当且仅当 A 的全部特征根实部非正, 并且实部为零的特征根对应的 *Jordan* 块是一阶的
3. 零解是不稳定的, 当且仅当 A 有实部为正的实特征根或 A 有实部为零的特征根且它对应的 *Jordan* 块是高于二阶的

7.2.2 Lyapunov 第二办法 (针对非线性方程)

考虑自治系统

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y}) \quad (7.4)$$

定理 7.2.2 (Lyapunov 稳定性). 令 \vec{y}_* 是方程 (7.4) 的平衡点, 令 $L: O \rightarrow R$ 是包含 \vec{y}_* 的开集 O 上的连续可微函数, 假设

1. $L(\vec{y}_*) = 0$, 且 $L(\vec{y}) > 0, \forall \vec{y} \in O \setminus \{\vec{y}_*\}$

2.

$$\dot{L}(\vec{y}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L \circ \phi_t(\vec{y}) \leq 0, \forall \vec{y} \in O \setminus \{\vec{y}_*\}$$

其中 $\phi_t(\vec{y})$ 表示以 \vec{y} 为初值的(7.4)的解.

则 \vec{y}_* 是稳定的, 若再假设 $\dot{L}(\vec{y}) < 0, \forall \vec{y} \in O \setminus \{\vec{y}_*\}$, 则 \vec{y}_* 是渐近稳定的.

证明. 1. ε 充分小, 使得 $B_\varepsilon(\vec{y}_*) \subset O$

定义 $\alpha = \min\{L(\vec{y}) \mid |\vec{y} - \vec{y}_*| = \varepsilon\}$

$u_\varepsilon = \{y \in B_\varepsilon(y_*) \mid L(y) < \alpha\}$, 则 u_ε 是开集, 且 $y_* \in u_\varepsilon$

由 $\dot{L} \leq 0$, 若 $y_0 \in u_\varepsilon$, 则

$$\frac{d}{dt} L(y(t)) \leq 0$$

以 y_0 为初值的解一定一直限制在 u_ε 中,

现在对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ 使得 $B_\delta \subset U_\varepsilon$, 以 y_0 为初值的解一直在 u_ε 中,

$$|y(t) - y_*| < \varepsilon, \forall t$$

取 δ 使得 $B_\delta(y_*) \subset U_\varepsilon$ 中, 则 y_* 是稳定的.

2. 由稳定性, $|y(t) - y_*| < \epsilon, \forall t$, 故 $|y(t)| \ll M, \forall t$, 故存在收敛子列 $t_n \rightarrow \infty$ 使得 $y(t_n) \rightarrow z_0$
现在要证的是,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_*| = 0$$

现在先证 z_0 就是 y_*

由于 $\dot{L} < 0, L(y(t))$ 严格递减趋于 $L(z_0)$, ($L(y(t))$ 的极限你是知道存在的, 但是你不知道 $y(t)$ 的极限, 你只知道 $y(t_n)$ 的极限, 但是对于 L 这个极限相同)

令 $z(s)$ 是以 z_0 为初值的解, 则有 3,

$$L(z(s)) < L(z_0), \forall s > 0$$

这里不能由 $L(z_0)$ 最小出点东西?

令 $Y_n(s)$ 是以 $y(t_n)$ 为初值的解, 则 $Y_n(s) = y(t_n + s)$

并且我们还知道 $y(t_n) \rightarrow z_0, Y_n(s)$ 是以 $y(t_n)$ 的解, $z(s)$ 是以 z_0 为初值的解, 由解对初值的连续依赖性, 当 n 充分大时, $L(Y_n(s)) = L(y(t_n + s)) < L(z_0), \forall s > 0$, 这与 $L(y(t)) > L(z_0)$ 矛盾.

于是 $y(t)$ 只能以 y_* 为唯一的极限点??? $y(t)$ 咋就有极限了.

□

例 7.2.1. 分析方程组
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\epsilon x + 2y)(z + 1) \\ \frac{dy}{dt} = (-x + \epsilon y)(z + 1) \\ \frac{dz}{dt} = -z^3 \end{cases}$$
 的平衡点的稳定性

证明.
$$\begin{cases} (\epsilon x + 2y) = 0 \\ (-x + \epsilon y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0, 0) \text{ 是平衡点找线性部分}$$

$$(x, y, z) = (0 + \tilde{x}, 0 + \tilde{y}, 0 + \tilde{z})$$

所以直接看线性化方程是什么,
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \epsilon x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \epsilon y \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & 2 & 0 \\ -1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda((\lambda - \epsilon)^2 + 2)$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \epsilon + \sqrt{2}i, \lambda_3 = \epsilon - \sqrt{2}i$$

如果 $\epsilon > 0$, 那么这个系统是线性不稳定的, 进而使不稳定的. 如果 $\epsilon \leq 0$, 虽然是线性稳定的, 但是不知道非线性怎么样.

构造 Lyapunov 函数,

$$L(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$

我要求一些系数 abc 使得满足应用定理的条件.

$$\begin{aligned}\dot{L}(x, y, z) &= \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial z} \dot{z} \\ &= 2ax((\epsilon x + 2y)(z + 1)) + 2by(-x + \epsilon y)(z + 1) \\ &\quad + \epsilon(2ax^2 + 2by^2)(z + 1) + (4a - 2b)xy(z + 1) - 2cz^4\end{aligned}$$

当 $\epsilon = 0$ 时, 取 $a=1, b=2, c=1$

$$\dot{L} = -z^4 \leq 0$$

$\Rightarrow (0, 0, 0)$ 是非线性稳定的.

当 $\epsilon < 0$ 时,

$$\dot{L}(x, y, z) = \epsilon(2x^2 + 4y^2) - 2z^4 < 0$$

故 $(0, 0, 0)$ 是渐近稳定的. □

7.3 平面上的动力系统, 奇点与极限环

考虑平面上的动力系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \end{cases}$$

$X(x, y), Y(x, y)$ 是平面上的连续函数.

为什么要考虑平面上的动力系统, 因为对于高维的动力系统, 我们可以两两组合考虑多个平面上的动力系统

消去 t , 得到 $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$

先来考虑线性系统

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

若 A 是非退化的, 则称 $(0, 0)$ 为初等奇点, 否则, 称之为高阶奇点. 令 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ 则原方程变为

$$T \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = AT \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1}AT \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

不妨设 A 是 Jordan 标准形. 即 A 为以下三种之一

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$$1. A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = \mu y \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x} \Rightarrow y = C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

(a) $\lambda = \mu, y = C|x|$, 还要判断一下稳定性

(b) λ, μ 同号

i. $|\frac{\mu}{\lambda}| > 1$